MINISTERUL EDUCAȚIEI și CERCETĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BUZĂU
Concursul Național Interdisciplinar
„Vrănceanu – Procopiu"
21.11.2026
MTEMATICĂ

IX

Problema 1 (10 puncte)

a) Demonstrați că, dacă $x, y \in \mathbb{R}$ și $x^2 + xy + y^2 = 3$, atunci $-2 \leq x + y \leq 2$.

b) Rezolvați în $\mathbb{Z}$ x $\mathbb{Z}$ ecuația $x^2 + xy + y^2 = 3$.

Problema 2 (10 puncte)

Fie $S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}-1}, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demonstrați că $1 + \frac{n}{4} < S_n < 1 + \frac{n}{2}$.

b) Demonstrați că $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2^{21}-1} > 6$.

1. Fiecare dintre subiecte se rezolvă pe o foaie separată, ce se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, elevul are dreptul să rezolve în orice ordine cerințele.
3. Durata probei este de 4 ore din momentul când s-a terminat distribuirea subiectelor către elevi.
4. Elevii au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 10 (un punct din oficiu). Punctajul final reprezintă suma acestora.

MINISTERUL EDUCAȚIEI și CERCETĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BUZĂU
Concursul Național Interdisciplinar
„Vrănceanu – Procopiu"
21.11.2026
MATEMATICĂ

IX

BAREM DE EVALUARE
CLASA A IX-A

PROBLEMA 1 **a) Demonstrați că, dacă $x, y \in \mathbb{R}$ și $x^2 + xy + y^2 = 3$, atunci $-2 \leq x + y \leq 2$** **b) Rezolvați în $\mathbb{Z}$ x $\mathbb{Z}$ ecuația $x^2 + xy + y^2 = 3$.**	**PARȚIAL**	**TOTAL**
a) Notăm $x + y = s$, de unde $x^2 + 2xy + y^2 = s^2$, adică $3 + xy = s^2 \Leftrightarrow xy = s^2 - 3$. Din $mg \leq ma \Rightarrow xy \leq \frac{s^2}{4} \Leftrightarrow s^2 - 3 \leq \frac{s^2}{4} \Leftrightarrow 4s^2 - 12 \leq s^2 \Leftrightarrow s^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq s \leq 2$ Finalizare	**2p** **2p** **1p**	**10p.**
b) Din a) $s \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ și $xy = s^2 - 3$ Dacă $s = 0, xy = -3$, imposibil în $\mathbb{Z}$ Dacă $s = \pm 1, xy = -2$, deci x, y sunt rădăcinile ecuației $t^2 \mp t - 2 = 0$, cu soluțiile $(-2, 1), (1, -2), (-1, 2), (2, -1)$ Dacă $s = \pm 2, xy = 1$, deci x, y sunt rădăcinile ecuației $t^2 \mp 2t + 1 = 0$, cu soluțiile $(-1, -1)$ și $(1,1)$. .	**1p** **1p** **1p** **1p**	
OFICIU	**1p**	

PROBLEMA 2 **Fie $S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}-1}, n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că $1 + \frac{n}{4} < S_n < 1 + \frac{n}{2}$**	**PARȚIAL**	**TOTAL**
Demonstrarea inegalității din stânga: $\mathbf{1 + \frac{n}{4} < S_n, n \in \mathbb{N}^*}$ prin metoda inducției matematice: Verificare: $P(1): 1 + \frac{1}{4} < 1 + \frac{1}{3}$, care este adevărată. Pasul inductiv: $P(k) \to P(k+1)$ Presupunem $P(k)$ adevărată și demonstrăm $P(k+1)$ adevărată. $P(k): 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}-1} > 1 + \frac{k}{4}$ $P(k+1): 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}-1} + \frac{1}{2^{k+1}+1} + \frac{1}{2^{k+1}+3} + \cdots + \frac{1}{2^{k+2}-1} > 1 + \frac{k+1}{4}$ $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}-1} + \frac{1}{2^{k+1}+1} + \frac{1}{2^{k+1}+3} + \cdots + \frac{1}{2^{k+2}-1}$ $> 1 + \frac{k}{4} + \frac{1}{2^{k+1}+1} + \frac{1}{2^{k+1}+3} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}+2^{k+1}-1}$ Cum $\frac{1}{2^{k+1}+1} + \frac{1}{2^{k+1}+3} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}+2^{k+1}-1} > \underbrace{\frac{1}{2^{k+2}} + \frac{1}{2^{k+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{k+2}}}_{2^k \text{ termeni}}$, rezultă $\frac{1}{2^{k+1}+1} + \frac{1}{2^{k+1}+3} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}+2^{k+1}-1} > \frac{2^k}{2^{k+2}}$, adică $\frac{1}{2^{k+1}+1} + \frac{1}{2^{k+1}+3} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}+2^{k+1}-1} > \frac{1}{4}$	**1p** **1p**	**10p.**

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

MINISTERUL EDUCAȚIEI și CERCETĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BUZĂU
Concursul Național Interdisciplinar
„Vrănceanu – Procopiu”
21.11.2026
MATEMATICĂ

IX

BAREM DE EVALUARE
CLASA A IX-A

Deci, $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}+\frac{1}{2^{k+1}+1}+\frac{1}{2^{k+1}+3}+\cdots+\frac{1}{2^{k+2}-1}>1+\frac{k}{4}+\frac{1}{4}=1+\frac{k+1}{4}$ Prin urmare, propoziția $P(k+1)$ este adevărată. Conform metodei inducției matematice, rezultă că $P(n)$ este adevărată, pentru orice număr natural nenul.	1p	
Demonstrarea inegalității din dreapta: $\boldsymbol{S_n<1+\frac{n}{2}, n\in\mathbb{N}^*}$ prin metoda inducției matematice: Verificare: $P(1): 1+\frac{1}{3}<1+\frac{1}{2}$, care este adevărată. Pasul inductiv: $P(k)\to P(k+1)$ Presupunem $P(k)$ adevărată și demonstrăm $P(k+1)$ adevărată. $P(k): 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}<1+\frac{k}{2}$ $P(k+1): 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}+\frac{1}{2^{k+1}+1}+\frac{1}{2^{k+1}+3}+\cdots+\frac{1}{2^{k+2}-1}<1+\frac{k+1}{2}$ $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}+\frac{1}{2^{k+1}+1}+\frac{1}{2^{k+1}+3}+\cdots+\frac{1}{2^{k+2}-1}$ $<1+\frac{k}{2}+\frac{1}{2^{k+1}+1}+\frac{1}{2^{k+1}+3}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}+2^{k+1}-1}$ Cum $\frac{1}{2^{k+1}+1}+\frac{1}{2^{k+1}+3}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}+2^{k+1}-1}<\underbrace{\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}}_{2^k\ termeni}$, rezultă $\frac{1}{2^{k+1}+1}+\frac{1}{2^{k+1}+3}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}+2^{k+1}-1}<\frac{2^k}{2^{k+1}}$, adică $\frac{1}{2^{k+1}+1}+\frac{1}{2^{k+1}+3}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}+2^{k+1}-1}<\frac{1}{2}$ Deci, $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}+\frac{1}{2^{k+1}+1}+\frac{1}{2^{k+1}+3}+\cdots+\frac{1}{2^{k+2}-1}<1+\frac{k}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{k+1}{2}$ Prin urmare, propoziția $P(k+1)$ este adevărată. Conform metodei inducției matematice, rezultă că $P(n)$ este adevărată, pentru orice număr natural nenul. **Finalizare** b) Înlocuim $n=20$ în a) și rezultă inegalitatea	1p 1p 1p 1p 2p.	
OFICIU	**1**	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

MINISTERUL EDUCAȚIEI și CERCETĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BUZĂU
Concursul Național Interdisciplinar
„Vrănceanu – Procopiu"
21.11.2026
MATEMATICĂ

X

Problema 1 (10 puncte)

Se dă suma

$$S = \frac{1}{\sqrt[3]{1^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{1000000^2}}$$

a) Demonstrați că pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ are loc

$$3\left(\sqrt[3]{k+1} - \sqrt[3]{k}\right) < \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}} < 3\left(\sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1}\right).$$

b) Determinați partea întreagă a lui S.

Problema 2 (10 puncte)

a) Fie $N = 2026!$. Calculați $S = \frac{1}{\log_2 N} + \frac{1}{\log_3 N} + \cdots + \frac{1}{\log_{2026} N}$.

b) Fie $x = \frac{1}{2}\log_a(a+1)$, $y = \log_{a+1}(a+2)$, $a \in \mathbb{R}, a > 1$. Demonstrați că $2x > y$.

1. Fiecare dintre subiecte se rezolvă pe o foaie separată, ce se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, elevul are dreptul să rezolve în orice ordine cerințele.
3. Durata probei este de 4 ore din momentul când s-a terminat distribuirea subiectelor către elevi.
4. Elevii au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 10 (un punct din oficiu). Punctajul final reprezintă suma acestora.

MINISTERUL EDUCAȚIEI și CERCETĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BUZĂU
Concursul Național Interdisciplinar
„Vrănceanu – Procopiu"
21.11.2026
MATEMATICĂ

X

BAREM DE EVALUARE
CLASA A X-A

PROBLEMA 1 Se dă suma $$S=\frac{1}{\sqrt[3]{1^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{1000000^2}}$$ a) Demonstrați că pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$ are loc $$3\left(\sqrt[3]{k+1}-\sqrt[3]{k}\right)<\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}<3\left(\sqrt[3]{k}-\sqrt[3]{k-1}\right).$$ b) Determinați partea întreagă a lui S.	**PARȚIAL**	**TOTAL**
a) Arătăm $3\left(\sqrt[3]{k+1}-\sqrt[3]{k}\right)<\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}$ Notăm $\sqrt[3]{k}=x, \sqrt[3]{k+1}=y$. Cum $y^3-x^3=1$, obținem $y-x=\frac{1}{y^2+xy+x^2}$. Inegalitatea dată devine $\frac{3}{y^2+xy+x^2}<\frac{1}{x^2}$, adică $3x^2<x^2+xy+y^2\Leftrightarrow 2x^2<xy+y^2$, care este adevărată, deoarece $y>x>0$. Arătăm $\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}<3\left(\sqrt[3]{k}-\sqrt[3]{k-1}\right)$ Notăm $\sqrt[3]{k}=a, \sqrt[3]{k-1}=b$. Cum $a^3-b^3=1$, obținem $a-b=\frac{1}{a^2+ab+b^2}$. Inegalitatea dată devine $\frac{1}{a^2}<\frac{3}{a^2+ab+b^2}$, adică $3a^2>a^2+ab+b^2\Leftrightarrow 2a^2>ab+b^2$, care este adevărată, deoarece $a>b\geq 0$.	**2p** **2p**	**10p.**
b) Însumând partea stângă pentru $k=\overline{1,1000000}$, se obține $$3\left(\sqrt[3]{1000000+1}-\sqrt[3]{1}\right)<S$$ Dar, $3\left(\sqrt[3]{1000000}-\sqrt[3]{1}\right)<3\left(\sqrt[3]{1000000+1}-\sqrt[3]{1}\right)<S$, adică $297<S$ Însumând partea dreaptă pentru $k=\overline{2,1000000}$, se obține $S<1+3\left(\sqrt[3]{1000000}-\sqrt[3]{1}\right)$, adică $S<298$. Deci $297<S<298$, de unde $[S]=297$.	**2p** **2p** **1p**	
OFICIU	**1p**	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

MINISTERUL EDUCAȚIEI și CERCETĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BUZĂU
Concursul Național Interdisciplinar
„Vrănceanu – Procopiu”
21.11.2026
MATEMATICĂ

X

BAREM DE EVALUARE
CLASA A X-A

PROBLEMA 2	**PARȚIAL**	**TOTAL**
a) Fie $N = 2026!$. Calculați $S = \frac{1}{\log_2 N} + \frac{1}{\log_3 N} + \cdots + \frac{1}{\log_{2026} N}$. b) Fie $x = \frac{1}{2}\log_a(a+1)$, $y = \log_{a+1}(a+2)$, $a \in \mathbb{R}, a > 1$. Demonstrați că $2x > y$.		
a) $S = \log_N 2 + \log_N 3 + \cdots + \log_N 2026 =$ $= \log_N 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2026 =$ $= \log_N 2\,026! = \log_N N = 1$	**1p** **1p** **1p**	**10p.**
b) $2x > y$ este echivalentă cu $\log_a(a+1) > \log_{a+1}(a+2)$ $\frac{\log_{a+1}(a+1)}{\log_{a+1} a} > \log_{a+1}(a+2)$ $\frac{1}{\log_{a+1} a} > \log_{a+1}(a+2)$ $\log_{a+1}(a+2) \cdot \log_{a+1} a < 1$ Dar $\sqrt{\log_{a+1}(a+2) \cdot \log_{a+1} a} \leq \frac{\log_{a+1}(a+2)+\log_{a+1} a}{2} = \frac{\log_{a+1}(a^2+2a)}{2} < \frac{\log_{a+1}(a+1)^2}{2} = 1$, de unde rezultă concluzia.	**1p** **1p** **1p** **1p** **1p** **1p**	
OFICIU	**1p**	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

MINISTERUL EDUCAȚIEI și CERCETĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BUZĂU
Concursul Național Interdisciplinar
„Vrânceanu – Procopiu"
21.11.2026
MATEMATICĂ

XI

Problema 1 (10 puncte)

Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix} x+2 & x \\ -x & 2-x \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C}),\ x\in\mathbb{C}$, **și** $B=A(1)-I_2$.

a) Dacă $m,n\in\mathbb{C}^*,\ m\cdot n\neq 1$ **și** $\det(m\cdot A+B)=\det(A+nB)=0$, **să se arate că** $4m=n$.

b) Să se calculeze $A^n(x),\ n\in\mathbb{N}^*$.

Problema 2 (10 puncte)

Fie șirurile $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ **unde** $a_n=\sqrt{\left|1^2-2^2+3^2-4^2+...+(-1)^{n-1}n^2\right|^2-n^3}$ **și**

$b_n=\dfrac{C_n^2}{\left[\sqrt{1\cdot 2}\right]+\left[\sqrt{2\cdot 3}\right]+\left[\sqrt{3\cdot 4}\right]+.....+\left[\sqrt{n\cdot(n+1}\right]}$, **unde** $[x]$ **reprezintă partea întreagă a lui x;**

a) Să se arate că $1^2-2^2+3^2-4^2+...+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}$, **pentru orice număr n natural nenul.**

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2\cdot a_n}{n^2\cdot b_n}\right)^n$.

1. Fiecare dintre subiecte se rezolvă pe o foaie separată, ce se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, elevul are dreptul să rezolve în orice ordine cerințele.
3. Durata probei este de 4 ore din momentul când s-a terminat distribuirea subiectelor către elevi.
4. Elevii au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 10 (un punct din oficiu). Punctajul final reprezintă suma acestora.

MINISTERUL EDUCAȚIEI și CERCETĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BUZĂU
Concursul Național Interdisciplinar
„Vrănceanu – Procopiu"
21.11.2026
MATEMATICĂ

XI

BAREM DE EVALUARE
CLASA A XI-A

PROBLEMA 1	**PARȚIAL**	**TOTAL**
a) $\det(m\cdot A+B)=\begin{vmatrix} mx+2m+2 & mx+1 \\ -mx-1 & 2m-mx \end{vmatrix}=0\Rightarrow (2m+1)^2=0\Rightarrow m=-\frac{1}{2};$	**3p**	
$\det(A+n\cdot B)=\begin{vmatrix} x+2+2n & x+n \\ -x-n & 2-x \end{vmatrix}=0\Rightarrow (n+2)^2=0\Rightarrow n=-2;$ Rezultă $4m=n$.	**2p**	
b) $A(x)=\begin{pmatrix} x+2 & x \\ -x & 2-x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & x \\ -x & -x \end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+x\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=2I_2+x\cdot C.$	**2p**	**10p.**
$A^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(2I_2\right)^{n-k}\cdot\left(x\cdot C\right)^k=2^n\cdot I_2+n\cdot 2^{n-1}\cdot x\cdot C,$ deoarece		
$C^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=O_2.$	**2p**	
OFICIU	**1p**	

PROBLEMA 2	**PARȚIAL**	**TOTAL**
a) Relația $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$ se demonstrează prin inducție.	**2p**	
b) Din a) și din $\left|1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2\right|^2=\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$ rezultă $a_n=\sqrt{\frac{n^2(n+1)^2}{4}-n^3}=\sqrt{\frac{n^2(n-1)^2}{4}}=\frac{n(n-1)}{2}.$	**2p**	
Din $n^2\le n^2+n<n^2+2n+1\Rightarrow\sqrt{n^2}\le\sqrt{n(n+1)}<\sqrt{(n+1)^2}\Rightarrow n\le\sqrt{n(n+1)}<n+1$.	**2p**	**10p.**
Rezultă $\left[\sqrt{n^2+n}\right]=n,\ \forall n\in\square$.		
Din $\frac{C_n^2}{\left[\sqrt{1\cdot 2}\right]+\left[\sqrt{2\cdot 3}\right]+\left[\sqrt{3\cdot 4}\right]+\ldots..+\left[\sqrt{n\cdot(n+1}\right]}=\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{1+2+3+\ldots+n}=\frac{n-1}{n+1}$		

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

MINISTERUL EDUCAȚIEI și CERCETĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BUZĂU
Concursul Național Interdisciplinar
„Vrănceanu – Procopiu”
21.11.2026
MATEMATICĂ

XI

BAREM DE EVALUARE
CLASA A XI-A

Rezultă $b_n = \dfrac{\dfrac{n(n-1)}{2}}{\dfrac{n(n+1)}{2}} = \dfrac{n-1}{n+1}$	**2p**	
Atunci, $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\dfrac{n(n-1)}{2}}{\dfrac{n-1}{n+1}} = \dfrac{1}{2}\cdot n(n+1)$. $\quad \dfrac{2a_n}{n^2 b_n} = \dfrac{2}{2}\cdot\dfrac{n(n+1)}{n^2} = \dfrac{n+1}{n} \Rightarrow$		
$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2\cdot a_n}{n^2\cdot b_n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$.	**1p**	
OFICIU	**1p**	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

MINISTERUL EDUCAȚIEI și CERCETĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BUZĂU
Concursul Național Interdisciplinar
„Vrănceanu – Procopiu"
21.11.2026
MATEMATICĂ

XII

Problema 1 (10 puncte)

Fie mulțimea $M=\mathbb{Q}\setminus\left\{-\frac{1}{5}\right\}$ **și legea de compoziție** $x*y=x+y+5xy,\ \forall x,y\in M$ **.**

a) Determinați $a,b\in M\setminus\mathbb{Z}$ **astfel încât** $a*b\in\mathbb{Z}$;

b) Calculați $\underbrace{x*x*x*.....*x}_{n\ termeni}$.

Problema 2 (10 puncte)

Fie $(G,\cdot)$ un grup și $a,b\in G$, astfel încât $a^3b=ba$ și $b^2=e$, unde $e\in G$ este elementul neutru al grupului. Să se arate că:

a) $a^8=e$; b) $(a^2b)^2=e$;

1. Fiecare dintre subiecte se rezolvă pe o foaie separată, ce se secretizează.
2. În cadrul unui subiect, elevul are dreptul să rezolve în orice ordine cerințele.
3. Durata probei este de 4 ore din momentul când s-a terminat distribuirea subiectelor către elevi.
4. Elevii au dreptul să utilizeze calculatoare de buzunar, dar neprogramabile.
5. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 10 (un punct din oficiu). Punctajul final reprezintă suma acestora.

MINISTERUL EDUCAȚIEI și CERCETĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BUZĂU
Concursul Național Interdisciplinar
„Vrănceanu – Procopiu”
21.11.2026
MATEMATICĂ

XII

BAREM DE EVALUARE
CLASA A XII-A

PROBLEMA 1	**PARȚIAL**	**TOTAL**
Fie mulțimea $M=\mathbb{Q}\setminus\left\{-\frac{1}{5}\right\}$ **și legea de compoziție** $x*y=x+y+5xy,\ \forall x,y\in M$. **a) Determinați** $a,b\in M\setminus\mathbb{Q}$ **astfel încât** $a*b\in\mathbb{Q}$; **b) Calculați** $\underbrace{x*x*x*.....*x}_{n\ termeni}$.		
a)) Fie $a,b\in M\setminus\mathbb{Q}$. $a*b=a+b+5ab=\frac{(5a+1)(5b+1)-1}{5}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow(5a+1)(5b+1)-1$ este multiplu de 5, adică, se pot da exemple. $a=\frac{2}{5},b=\frac{1}{5}\Rightarrow a*b=\frac{5}{5}=1\in\mathbb{Q}$, etc.	**3p**	
b) Se demonstrează prn inducție matematică: P(2): $x*x=\frac{(5x+1)^2-1}{5}$. Presupunem că P(n): $\underbrace{x*x*....*x}_{n\ termeni}=\frac{(5x+1)^n-1}{5}$ este adevărată pentru un $n\rangle 2$ și demonstrăm că P(n+1): $\underbrace{x*x*.....*x*x}_{n+1\ termeni}=\frac{(5x+1)^{n+1}-1}{5}$ este adevărată. $\underbrace{x*x*.....*x*x}_{n+1\ termeni}=\underbrace{x*x*.....*x*x}_{n\ termeni}*x=\frac{(5x+1)^n-1}{5}*x=$ $=\frac{\left[5\cdot\left(\frac{(5x+1)^n-1}{5}\right)+1\right]\cdot(5x+1)-1}{5}=\frac{(5x+1)^{n+1}-1}{5}$, adevărat. P(n) este adevărată pentru orice număr natural n.	**1p** **2p** **3p**	**10p.**
OFICIU	**1p**	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

MINISTERUL EDUCAȚIEI și CERCETĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BUZĂU
Concursul Național Interdisciplinar
„Vrănceanu – Procopiu”
21.11.2026
MATEMATICĂ

XII

BAREM DE EVALUARE
CLASA A XII-A

PROBLEMA 2	**PARȚIAL**	**TOTAL**
Determinați funcția $f:\square \to (0;\infty)$ continuă, cu proprietatea că există $F:\square \to (0;\infty)$ o primitivă a funcției f(x) astfel încât F^4 este o primitivă a funcției f^4.		
a) $a^3b = ba \mid \cdot b \Rightarrow a^3b^2 = bab \Rightarrow a^3 = bab$ deoarece $b^2 = e$, ... 2p $b \cdot \mid a^3 = bab \Rightarrow b \cdot a^3 = b^2ab \mid \cdot b \Rightarrow ba^3b = b^2ab^2 \Rightarrow ba^3b = a$ ..... 1p $a^9 = a^3a^3a^3 = babbabbab = baaab = ba^3b = a \Rightarrow a^9 = a$. Rezultă $a^8 = e$ . ..... 2p b) Din $a = ba^3b \Rightarrow a^2 = ba^3bba^3b = ba^3ea^3b = ba^6b \mid \cdot b \Rightarrow$ ..... 2p $a^2b = ba^6b^2 = ba^6 \mid \cdot a^2b \Rightarrow (a^2b)^2 = ba^6a^2b = ba^8b = beb = b^2 = e.$ 2p		**10p.**
OFICIU	**1p**	

2

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.